Les Intérêts Composés : Explication, Formules et Comparaison avec les Intérêts Simples

Qu'appelle-t-on les intérêts composés ?

Les **intérêts composés** jouent un rôle central dans la croissance des investissements, permettant à un capital de croître de manière exponentielle grâce à la réintégration des intérêts générés. Cet article approfondit ce concept en détaillant la **formule de Taylor**, son historique, et en comparant les effets des intérêts composés et non composés à travers des exemples chiffrés et une illustration graphique.

Présentation des intérêts Composés avec Exemples Chiffrés

Les intérêts composés consistent à ajouter les intérêts générés au capital initial, de sorte que ces intérêts produisent eux-mêmes des intérêts lors des périodes suivantes. Ce processus de "capitalisation" entraîne une croissance accélérée du capital au fil du temps.

Exemple : Placement de 100.000$ à 10% sur 3 ans

- **Année 1 :** $100.000 \times (1 + 0{,}10) = 110.000$
- **Année 2 :** $110.000 \times (1 + 0{,}10) = 121.000$
- **Année 3 :** $121.000 \times (1 + 0{,}10) = 133.100$

Ainsi, après 3 ans, le capital atteint 133.100$, soit un gain total de **33.100$**.

En comparaison, avec des **intérêts simples** (non composés), les intérêts sont calculés uniquement sur le capital initial :

- **Année 1 :** 100.000 + (100.000 × 0,10) = 110.000
- **Année 2 :** 110.000 + (100.000 × 0,10) = 120.000
- **Année 3 :** 120.000 + (100.000 × 0,10) = 130.000

Après 3 ans, le capital atteint 130.000$, soit un gain total de **30000$**. Les intérêts composés génèrent donc un gain supérieur de 3100$ par rapport aux intérêts simples. soit environ 10% de plus.

La formule de Taylor : historique et explication

La **formule de Taylor**, nommée d'après le mathématicien anglais Brook Taylor qui l'a établie en 1715, est un outil mathématique permettant d'approximer une fonction différentiable en un point donné par un polynôme. Cette approximation est particulièrement utile en analyse pour simplifier des fonctions complexes.

La formule de Taylor pour une fonction f autour d'un point a est donnée par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

où $R_n(x)$ représente le reste de l'approximation après n termes.

Cette formule exprime la valeur de la fonction $f(x)$ en termes de ses dérivées successives en a, offrant ainsi une approximation polynomiale de la fonction autour de ce point.

Différence Mathématique entre Intérêts Composés et non Composés

Les **intérêts simples** sont calculés uniquement sur le capital initial, tandis que les **intérêts composés** sont calculés sur le capital initial plus les intérêts accumulés. Mathématiquement, cela se traduit par :

- **Intérêts simples :** $C_N = C_0 \times (1 + i \times N)$
- **Intérêts composés :** $C_N = C_0 \times (1 + i)^N$

où :

- C_0 est le capital initial,
- C_N est le capital à l'année N,
- i est le taux d'intérêt annuel,
- N est le nombre d'années.

Pour comparer ces deux formules, on peut utiliser le **développement en série de Taylor** de $(1 + i)^N$ autour de $p = 0$:

$$(1+i)^N \approx 1 + i \times N + \frac{N(N-1)}{2}p^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}p^3 + \dots$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient une approximation linéaire :

$$(1+i)^N \approx 1 + i \times N$$

Cette approximation correspond à la formule des intérêts simples. Cependant, pour des valeurs élevées de i ou N, les termes quadratiques et cubiques deviennent prépondérants, rendant les intérêts composés largement gagnats par rapport aux intérêts simples.

Comparaison Chiffrée et Illustration Graphique

Reprenons l'exemple d'un capital initial de 100.000$ investi à un taux d'intérêt annuel de 10%. Comparons les croissances du capital avec intérêts simples et composés sur des périodes de 20, 30 et 40 ans.

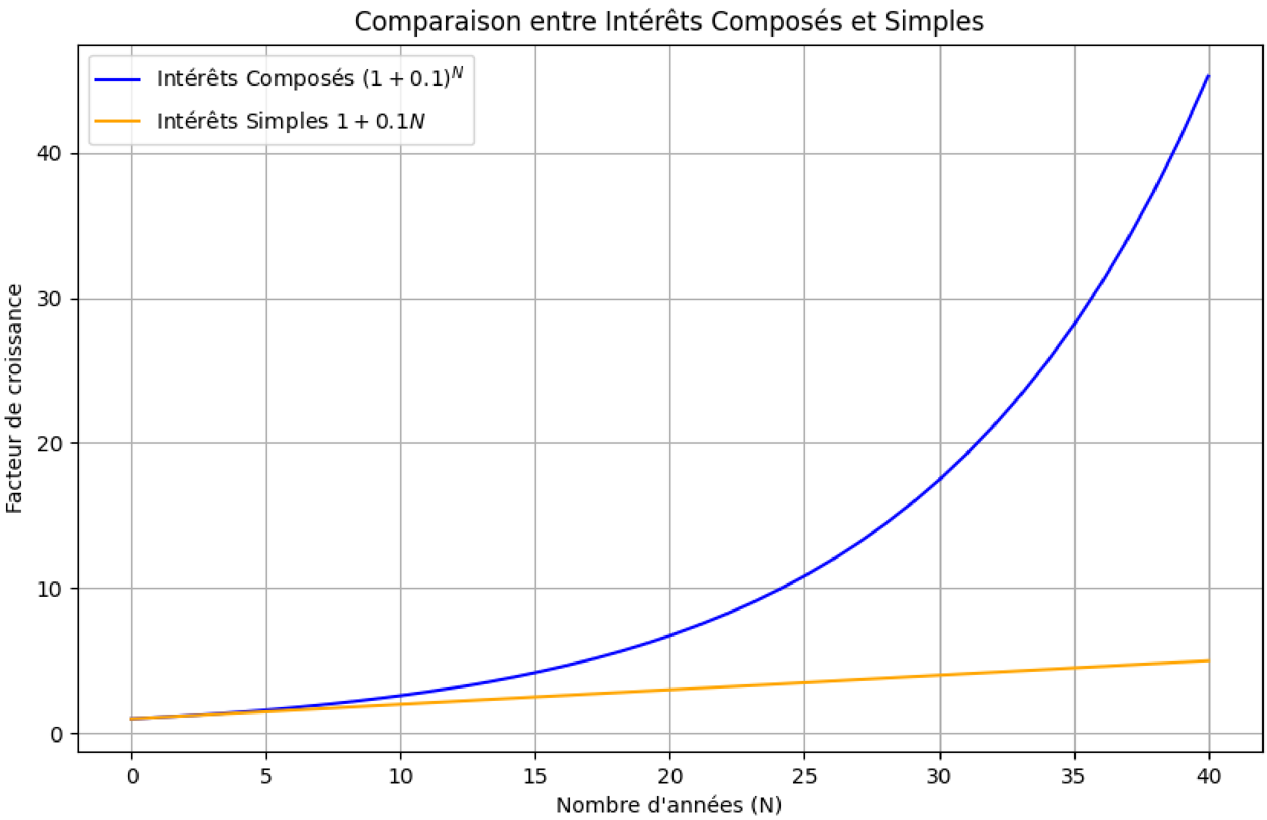
Année	Intérêt Simple	Intérêt Composé	Différence
5	150.000	161.051	11.051
10	200.000	259.374	59.374
20	300.000	672.750	372.750
30	400.000	1.744.940	1.344.940
40	500.000	4.525.925	4.025.925

Comparaison entre intérêts simples et composés à 10%

Tableau Comparatif sur 5, 10, 20, 30 et 40 ans, pour 100.000$ investis à 10% par an

Le tableau ci-dessus présente deux avantages : le premier est de souligner l'importance de la capitalisation des intérêts pour optimiser les gains d'un investissement à long terme. Le second est de démontrer la capacité d'un capital à croître de manière significative sur une longue période. Même de modestes investissements, s'ils sont maintenus suffisamment longtemps, peuvent générer des gains substantiels grâce aux intérêts composés. Ce mécanisme puissant doit être exploité, notamment dans le cadre fiscal du PER. Étant donné que les fonds y sont bloqués – sauf exceptions – jusqu'à la retraite, l'effet de capitalisation s'applique naturellement, avec des résultats d'autant plus significatifs que l'investissement est réalisé tôt.

Graphique



La comparaison chiffrée et l'illustration graphique démontrent clairement la puissance des intérêts composés. Sur des périodes prolongées, les intérêts composés permettent une croissance exponentielle du capital, surpassant largement les intérêts simples. Cette différence devient particulièrement marquée au fil des années, soulignant l'importance de la capitalisation des intérêts pour maximiser les gains d'un investissement à long terme.

Pour Aller Plus Loin

La formule $\frac{C_N}{C_0} = F = (1+i)^N$ (ou F reprsésente le facteur d'accroissement du capital au bout de N années) permet, en connaissance de deux parmi les variables F, i ou N, de déterminer l'autre. Si je veux doubler mon capirtal en 10 ans, je peux utiliser cette formule pour trouver le taux d'intérêt nécessaire. De même, si je veux atteindre un capital donné dans un certain nombre d'années, je peux calculer le taux d'intérêt requis. Cette formule est donc un outil puissant pour planifier des investissements et évaluer leur rentabilité potentielle.

Quelques Cas d'Application

1. Si j'investis un capital donné peandant 10 ans à 7% d'intérêt annuel, quel sera le capital final? La formule à utiliser $F = (1 + 0.07)^{10}$, j'aurai donc multiplié mon capital par $(1 + 0.07)^{10} \approx 1.9672$ soit un gain de 96.72%.
   Dans le cas general la formule permettant de calculer le facteur $F = \frac{C_N}{C_0}$ est la formule écrite plus haut, $F = (1 + i)^N$

2. Si je veux tripler mon capital en 20 ans, quel taux d'intérêt annuel dois-je obtenir? La formule a appliquer est $(1 + i)^{20} = 3$ soit $i = \sqrt[20]{3} - 1 \approx 0.1146$ soit 11.46%.
   Plus généralement, si je veux multiplier mon capital par un facteur F en N années, le taux d'intérêt annuel nécessaire est donné par $i = \sqrt[N]{F} - 1$.

3. Si je pense pouvoir obtenir un interet annuel de 8% par ans, combien de temps me faudra-il pour tripler mon capital? La formule à utiliser est $(1 + 0.08)^N = 3$ soit $N = \frac{\ln(3)}{\ln(1.08)} \approx 14.21$ ans.
   Dans le cas général, si je veux multiplier mon capital par un facteur F en le capitalisant au taux i, le nombre d'années nécessaires est donné par $N = \frac{\ln(F)}{\ln(1+i)}$.

Le tableau ci dessous regroupe quelques ordres de grandeurs souvent utilisés pour fixer les idées.

Années	**Facteur ×2**	**Facteur ×3**	**Facteur ×5**	**Facteur ×10**
5	14,9%	24,6%	38,0%	58,5%
10	7,2%	11,6%	17,5%	25,9%
20	3,5%	5,7%	8,4%	12,2%
30	2,3%	3,7%	5,5%	8,0%
40	1,8%	2,8%	4,1%	5,9%

Taux d'intérêt annuels nécessaires pour différents facteurs d'accroissement du capital et horizons de placement

Conclusion: Le temps est le meilleur allié de l'investisseur!

L'étude des intérêts composés met en évidence leur puissance en matière de croissance du capital à long terme. Contrairement aux intérêts simples, qui augmentent de manière linéaire, les intérêts composés permettent une progression exponentielle du capital grâce à l'effet de capitalisation. Plus la durée de placement est longue, plus la différence entre ces deux modes de calcul est significative.

La maîtrise des intérêts composés est un levier essentiel pour construire une stratégie d'investissement efficace, qu'il s'agisse de préparer sa retraite, d'optimiser son patrimoine ou de faire fructifier une épargne. Plus tôt un capital est investi, plus l'effet de capitalisation est puissant, renforçant ainsi l'importance d'une gestion financière prévoyante et réfléchie.